

Fiche 2

Opérations sur les matrices

Objectif : A la fin de ce cours, l'apprenant devra être capable de construire des matrices.

Sommaire

2.1	Addition et multiplication par un scalaire	5
2.2	Produit de matrices	6
2.3	Puissances d'une matrice carrée	10
2.4	Transposition d'une matrice	11
2.5	Trace d'une matrice carrée	11
2.6	Exercices de travaux dirigés	13

2.1 Addition et multiplication par un scalaire

- L'addition de **deux matrices de même ordre** se fait élément par élément c'est-à-dire si A et B sont deux matrices d'ordre (n, m) alors la matrice $C = A + B$ est aussi une matrice d'ordre (n, m) dont les éléments sont définis par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

pour tous $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$.

- Multiplier une matrice par un réel revient à multiplier tous ses éléments par ledit réel.

Exemple 2.1 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 & 3+4 \\ 4+3 & 5+(-8) & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 7 & -3 & 7 \end{pmatrix},$$

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}, \quad 2B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 6 & -16 & 2 \end{pmatrix},$$

$$2B - A = 2B + (-A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 6 & -16 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & -21 & -4 \end{pmatrix}.$$

On pouvait aussi faire directement

$$\begin{aligned} 2B - A &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 6 & -16 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 & 2-2 & 8-3 \\ 6-4 & -16-5 & 2-6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & -21 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.2 Produit de matrices

Définition 2.1 Soient A une matrice d'ordre $(n, \mathbf{m})$ et B une matrice d'ordre $(\mathbf{m}, p)$ c'est-à-dire telles que

nombre de colonnes de A = nombre de lignes de B .

Le produit $C = AB$ est une matrice d'ordre (n, p) dont le terme c_{ij} est défini pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, p$ par :

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \text{somme du produit terme à terme de la ligne } i \text{ de } A \text{ et de la colonne } j \text{ de } B \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}. \end{aligned}$$

Voici un moyen simple de trouver l'ordre du produit :

$$\begin{array}{llll} \text{Matrices} & : & A & B \longrightarrow AB \\ \text{Ordres} & : & (\boxed{n}, p) & (p, \boxed{q}) \longrightarrow (\boxed{n}, \boxed{q}) \end{array}$$

Exemple 2.2 Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est d'ordre $(3, \mathbf{2})$ et la matrice B est d'ordre $(\mathbf{2}, 2)$. Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B donc le produit AB existe et est d'ordre $(3, 2)$. On peut noter la matrice AB sous la forme

$$AB = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \\ u & v \end{pmatrix}$$

où x, y, z, t, u et v sont des réels à calculer.

- Calculer l'élément x de AB revient à calculer l'élément se trouvant à l'intersection de la ligne 1 et la colonne 1 de AB . Donc on prend la ligne 1 de A et la colonne 1 de B qu'on multiplie terme à terme après quoi on somme. Cela correspond au processus suivant :

Ligne 1 de A
Ligne 1, colonne 1 du produit AB

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-2} \\ 3 & 7 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{4} & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1 \times 4 + (-2) \times 6} & \\ & \end{pmatrix}$$

Colonne 1 de B

- Pour obtenir y , on cherche donc à calculer l'élément se trouvant à l'intersection de la ligne 1 et de la colonne 2 de AB . Donc on prend la ligne 1 de A et la colonne 2 de B qu'on multiplie terme à terme après quoi on somme :

Ligne 1 de A
Ligne 1, colonne 2 du produit AB

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-2} \\ 3 & 7 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \boxed{1} \\ 6 & \boxed{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + (-2) \times 6 & \boxed{1 \times 1 + (-2) \times (-5)} \\ & \end{pmatrix}$$

Colonne 2 de B

- Pour obtenir z (l'élément se trouvant à l'intersection de la ligne 2 et de la colonne 1 de AB), on prend la ligne 2 de A et la colonne 1 de B qu'on multiplie terme à terme après quoi on somme :

Ligne 2 de A
Ligne 2, colonne 1 du produit AB

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \boxed{3} & \boxed{7} \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{4} & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + (-2) \times 6 & 1 \times 1 + (-2) \times (-5) \\ \boxed{3 \times 4 + 7 \times 6} & \end{pmatrix}$$

Colonne 1 de B

- Pour obtenir t (l'élément se trouvant à l'intersection de la ligne 2 et de la colonne 2 de AB), on prend la ligne 2 de A et la colonne 2 de B qu'on multiplie terme à terme après quoi on somme :

Ligne 2 de A
Ligne 2, colonne 2 du produit AB

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \boxed{3} & \boxed{7} \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \boxed{1} \\ 6 & \boxed{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + (-2) \times 6 & 1 \times 1 + (-2) \times (-5) \\ 3 \times 4 + 7 \times 6 & \boxed{3 \times 1 + 7 \times (-5)} \\ (-4) \times 4 + 6 \times 6 & (-4) \times 1 + 6 \times (-5) \end{pmatrix}$$

Colonne 2 de B

- Pour obtenir u (l'élément se trouvant à l'intersection de la ligne 3 et de la colonne 1 de AB), on prend la ligne 3 de A et la colonne 1 de B qu'on multiplie terme à terme après quoi on somme :

Ligne 3 de A
Ligne 3, colonne 1 du produit AB

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \\ \boxed{-4} & \boxed{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{4} & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + (-2) \times 6 & 1 \times 1 + (-2) \times (-5) \\ 3 \times 4 + 7 \times 6 & 3 \times 1 + 7 \times (-5) \\ \boxed{(-4) \times 4 + 6 \times 6} & \boxed{(-4) \times 1 + 6 \times (-5)} \end{pmatrix}$$

Colonne 1 de B

- Pour obtenir v (l'élément se trouvant à l'intersection de la ligne 3 et de la colonne 2 de AB), on prend la ligne 3 de A et la colonne 2 de B qu'on multiplie terme à terme après quoi on somme :

Ligne 3 de A
Ligne 3, colonne 2 du produit AB

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \\ \boxed{-4} & \boxed{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \boxed{1} \\ 6 & \boxed{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + (-2) \times 6 & 1 \times 1 + (-2) \times (-5) \\ 3 \times 4 + 7 \times 6 & 3 \times 1 + 7 \times (-5) \\ (-4) \times 4 + 6 \times 6 & \boxed{(-4) \times 1 + 6 \times (-5)} \end{pmatrix}$$

Colonne 2 de B

On obtient donc

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + (-2) \times 6 & 1 \times 1 + (-2) \times (-5) \\ 3 \times 4 + 7 \times 6 & 3 \times 1 + 7 \times (-5) \\ (-4) \times 4 + 6 \times 6 & (-4) \times 1 + 6 \times (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ 54 & -32 \\ 20 & -34 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.1 Dans l'exemple 2.2, le produit BA n'existe pas car B a 2 colonnes et A a 3 lignes.

Exercice d'application 2.1 Soient A , B et C les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Parmi les produits suivants, effectuer celui (ceux) qui sont possible(s) : AB , BA et AC .

►►► *Indications :*

- La matrice A est d'ordre $(2,3)$ et la matrice B est d'ordre $(3,1)$. Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B donc le produit AB existe et est d'ordre $(2,1)$. On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 + (-1) \times (-1) \\ 2 \times 1 + 4 \times 2 + 0 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- La matrice B est d'ordre $(3,1)$ et la matrice A est d'ordre $(2,3)$. Le nombre de colonnes de B est différent du nombre de lignes de A donc le produit BA n'existe pas.
- La matrice A est d'ordre $(2,3)$ et la matrice C est carrée d'ordre 2 c'est-à-dire C est d'ordre $(2,2)$. Le nombre de colonnes de A est différent du nombre de lignes de C donc le produit AC n'existe pas.

◇

Remarque 2.2

- Si A est une matrice carrée d'ordre n alors $AI_n = I_n A = A$.
- Le produit de matrices n'est pas commutatif : l'existence de AB n'assure pas celle de BA et, en général, même si elles existent, les matrices AB et BA ne sont pas égales.

- Contrairement aux réels, le fait que le produit AB de deux matrices soit une matrice nulle n'implique pas nécessairement que l'une des deux matrices A ou B soit nulle. C'est-à-dire que le produit de deux matrices non nulles peut donner une matrice nulle. Par exemple, pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le produit

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice nulle alors que ni A ni B n'est une matrice nulle.

2.3 Puissances d'une matrice carrée

On peut multiplier une matrice carrée par elle-même : on note $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$. On peut ainsi définir les puissances successives d'une matrice.

Définition 2.2 Soit A une matrice carrée d'ordre n . On définit les puissances successives de A par $A^0 = I_n$ et $A^{k+1} = A^k \times A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ facteurs}}$.

Exemple 2.3 Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Comme A est une matrice carrée, on peut calculer ses puissances. On a :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times (-3) & 1 \times 2 + 2 \times 4 \\ -3 \times 1 + 4 \times (-3) & -3 \times 2 + 4 \times 4 \end{pmatrix} \\ A^2 &= \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \times A \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \times 1 + 10 \times (-3) & -5 \times 2 + 10 \times 4 \\ -15 \times 1 + 10 \times (-3) & -15 \times 2 + 10 \times 4 \end{pmatrix} \\ A^3 &= \begin{pmatrix} -35 & 30 \\ -45 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On aurait pu aussi faire

$$\begin{aligned} A^3 &= A \times A^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times (-5) + 2 \times (-15) & 1 \times 10 + 2 \times 10 \\ -3 \times (-5) + 4 \times (-15) & -3 \times 10 + 4 \times 10 \end{pmatrix} \\ A^3 &= \begin{pmatrix} -35 & 30 \\ -45 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.4 Transposition d'une matrice

Définition 2.3 Soit A une matrice d'ordre (n, m) . La **transposée** de A est la matrice d'ordre (m, n) obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A . Elle est notée ${}^tA$ ou A^T et ses éléments sont définis par :

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, m, \quad \text{et } j = 1, \dots, n.$$

Transposer une matrice revient à transformer les lignes en colonnes : la première ligne devient la première colonne, la seconde ligne devient la seconde colonne, etc. . .

Exemple 2.4 Soit la matrice d'ordre $(2, 3)$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

La transposée de A est la matrice d'ordre $(3, 2)$ obtenue en transformant les lignes de A en colonnes :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.3 Il faut noter que le symbole en minuscule de la transposée « ^{t} » est placé à gauche de la matrice sur laquelle il doit agir alors que le symbole majuscule « ^{T} » est placé à droite de la matrice sur laquelle il doit agir. Par exemple, dans l'expression $A{}^tB$, c'est la matrice B qui est concernée par la transposée alors que dans l'expression A^TB , c'est la matrice A qui est transposée.

2.5 Trace d'une matrice carrée

Définition 2.4 Soit A une matrice carrée d'ordre n . La **trace** de A , notée $\text{tr}(A)$, est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Exemple 2.5 On considère la matrice carrée d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Alors $\text{tr}(A) = 1 + 5 + 9 = 15$.